

§22 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Kurzfassung der Ergebnisse
aus Analysis 2

→

Existenz und
Eindeutigkeit
im Kontext von
Picard-Lindelöf

Satz 22.1 : (Eindeutigkeit)

Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$

sei stetig und genüge auf G einer

lokalen partiellen Lipschitz Bdg. bzgl. y .

$\gamma, \gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ seien auf einem
Intervall I erklärte C^1 -Lösungen

(mit $(t, \gamma(t)), (t, \gamma(t)) \in G$) von

$$\gamma'(t) = f(t, \gamma(t)), \quad t \in I.$$

Gibt es dann ein $t_0 \in I$ mit

$\gamma(t_0) = \gamma(t_0)$, so folgt $\gamma = \gamma$ auf I .

($\Rightarrow$ Eindeutigkeit für das AWP)

Beweis:

Schritt 1: Ist $a \in I$ ein beliebiger

Punkt mit $f(a) = \gamma(a)$, so findet
man ein $\varepsilon > 0$ mit

$$f = \gamma \text{ auf } I \cap (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

Begründung: Es gilt wegen $f(a) = \gamma(a)$

$$\begin{aligned} f(t) - \gamma(t) &= \int_a^t (f'(u) - \gamma'(u)) du \\ &= \int_a^t (f(u, f(u)) - f(u, \gamma(u))) du. \end{aligned}$$

Zu $(a, f(a)) = (a, \gamma(a)) \in G$ existiert
 eine Umgebung $U \subset G$ und ein $L \geq 0$
 mit $|f(u, y) - f(u, \tilde{y})| \leq L |y - \tilde{y}|$

für alle $(t, y), (t, \tilde{y}) \in \mathcal{U}$.

f, γ stetig in a $\implies$

$$|f(t, y(t)) - f(t, \gamma(t))| \leq L |y(t) - \gamma(t)|$$

für alle $t \in I \cap (a-\delta, a+\delta)$ mit δ so
klein, dass $(t, y(t)), (t, \gamma(t)) \in \mathcal{U}$.

Also: $|y(t) - \gamma(t)| \leq$

$$(1) \quad L \cdot \left| \int_a^t |y(u) - \gamma(u)| du \right|$$

$$\forall t \in I \cap (a-\delta, a+\delta).$$

Sei $0 \in I$, $L > 0$ und

$$\delta \cdot L \leq \frac{1}{2}$$

(verkleinere ggf. δ). Man setzt

$$J := I \cap [a - \delta/2, a + \delta/2]$$

$$\Rightarrow \quad \forall t \in J: \quad |f(t) - \gamma(t)| \leq$$

(1)

$$L \cdot \delta \cdot \max_J |f - \gamma| \leq$$

$$\frac{1}{2} \max_J |f - \gamma|.$$

Bildet man links max über J , so folgt

$$f = \gamma \text{ auf } J.$$

Schritt 2: Sei jetzt $t_0 \in I$ eine

Stelle mit $f(t_0) = \gamma(t_0)$. Wir

behaupten: $f = \gamma$ für $t \geq t_0$

(analog für $t \leq t_0$)

Setze: $T_0 := \sup \{ t \in I : f = \gamma$
auf $[t_0, t] \}$

Fall 1: $T_0 = \infty$ oder rechter Endpunkt
von I ✓

Fall 2: T_0 innerer Punkt von I

$\Rightarrow \exists \delta > 0 : [T_0, T_0 + \delta] \subset I;$

Def. von T_0 , Stetigkeit von $\gamma, f \Rightarrow$
 $f(T_0) = \gamma(T_0);$

Schritt 1 $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : f = \gamma$ auf $[T_0, T_0 + \varepsilon]$

Wdspr. zur Def. von T_0 , Fall 2

trifft nicht ein. $\square$

Noch ein

Beispiel: $G := \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(t, y) = t y^2$

$\Rightarrow$ zugehörige Dgl: $y'(t) = t y^2(t)$

Lipschitz Bdg. bzgl. y ?

$$|f(t, y) - f(t, \tilde{y})| = |t| |y^2 - \tilde{y}^2|$$

$$\leq |t| \{ |y| + |\tilde{y}| \} |y - \tilde{y}|$$

$$=: L(t, y, \tilde{y})$$

Ist (t_0, y_0) gegeben, so ist auf jeder

Kreisscheibe $B_R(t_0, y_0)$ das Supremum

von $L(t, y, \tilde{y})$ [gebildet über

$(t, y), (t, \tilde{y}) \in B_R(t_0, y_0)$] endlich $\Rightarrow$

-133-

f auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ lokal partiell Lipschitz,
aber nicht mehr!

Wir zeigen: („Picard-Lindelöf“)

lokale partielle Lipschitz - Bdg.
 $\implies$ lokale Existenz v. Lösungen

Hilfsmittel dazu (vgl. Übungen)

Fixpunktsatz von Banach :

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer
Raum, $A \subset X$, und die Abbildung

$$F: A \rightarrow \underline{\underline{A}}$$

erfülle

$$d(\overline{F}(x), \overline{F}(y)) \leq \textcircled{\sim} d(x, y)$$

$$\forall x, y \in A$$

mit einer Zahl $\boxed{\textcircled{\sim} < 1}$. Ist

A abgeschlossen, so hat $\overline{F}$ in A einen eindeutigen Fixpunkt x^* ,
also $x^* = \overline{F}(x^*)$.

Wählt man einen beliebigen Startwert $x_0 \in A$, so konvergiert

die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$

$$x_{n+1} := \overline{F}(x_n),$$

gegen x^* .

[Hinweis: (x_n) ist Cauchy Folge!]

~~man kann zeigen~~

Satz 22.2 : Existenzsatz von Picard und Lindelöf

Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi: G \rightarrow \mathbb{R}^n$
sei stetig, $\varphi = \varphi(t, y)$.

Außerdem erfülle φ auf G eine
lokale partielle Lipschitz-Bdg. bzgl. y .

Dann gibt es zu jeder Vorgabe von
 $(t_0, y_0) \in G$

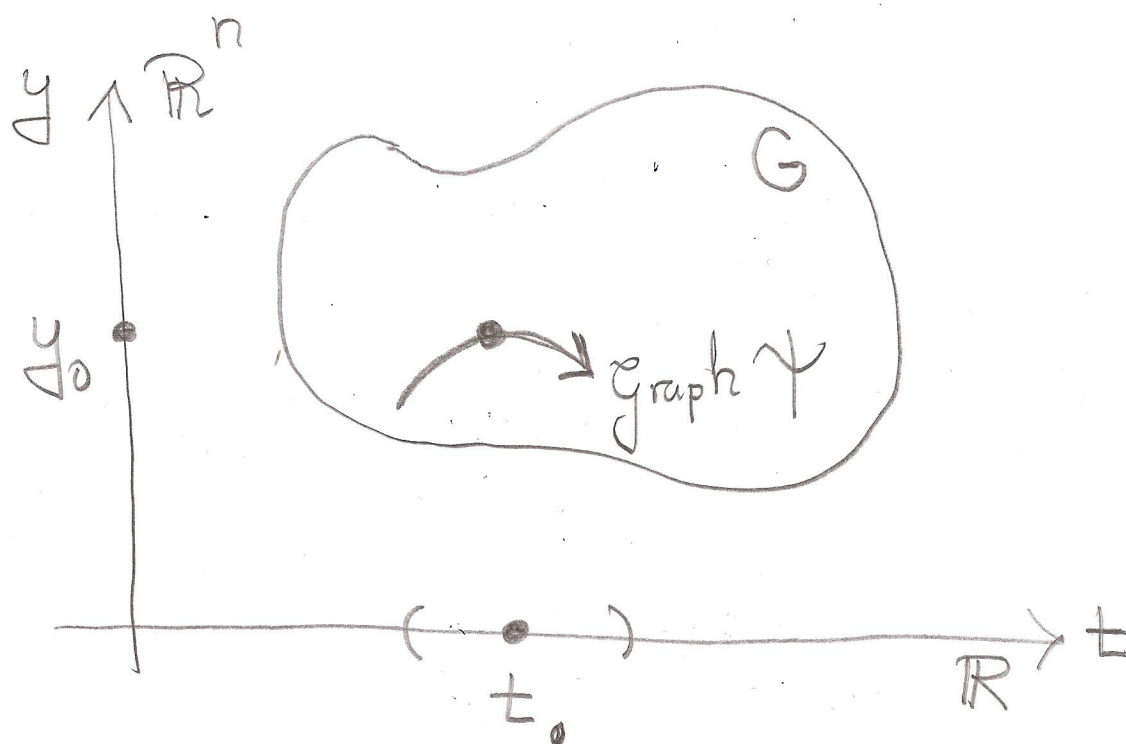
ein Intervall $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ um t_0

und eine C^1 -Funktion

$\gamma: [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$(*) \quad \begin{cases} \gamma(t_0) = y_0, \\ \gamma'(t) = f(t, \gamma(t)) \text{ auf } [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], \end{cases}$$

speziell verläuft $t \mapsto (t, \gamma(t))$ in
der Menge G .



Bemerkungen :

1.) Satz 22.1 $\Rightarrow$: Ist $\tilde{\gamma}$:
 $[t_0 - \tilde{\varepsilon}, t_0 + \tilde{\varepsilon}] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine weitere

Lösung von $(*)$, so gilt

$$\gamma = \tilde{\gamma}$$

auf $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \cap [t_0 - \tilde{\varepsilon}, t_0 + \tilde{\varepsilon}]$.

2.) Satz 22.2 ist ein lokaler Existenzsatz, denn " ε " kann man i.a. nicht vorgeben. ε hängt von f ab und kann sehr klein sein!

Faustregel :

bzw. global Lipschitz
bzgl. y

$f(t, y)$ linear wachsend in y
und $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, d. h.
 $|f(t, y)| \leq \text{const} (|y| + 1)$
 $\Rightarrow \varepsilon$ beliebig groß